DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE

cea

LES TP DU CEA



Mesure de la masse du trou noir au centre de la galaxie à partir d'observations du VLT de l'ESO

Table des matières

MESURE DE LA MASSE DU TROU NOIR AU CENTRE DE LA GALAXIE À PARTIR D'OBSERVATIONS DU VLT DE L'ESO

INTRODUCTION 4

- Les télescopes NASA/ESA/ESO 4
- Les trous noirs : une introduction 5
- D'où vient le nom des trous noirs ? 6
- Le trou noir au centre de la galaxie 7
- Gravitation 8

ACTIVITÉS (PREMIÈRE PARTIE) 9

- Activité 1 (facultative) : Ellipses 9
- Activité 2 (facultative) : La masse du Soleil et de la Terre 10

OBSERVATIONS AVEC LE VLT 13

ACTIVITÉS (DEUXIÈME PARTIE) 16

- Activité 3 : Trouver le demi-grand axe « a » 16
- Activité 4 : Trouver la période P 18
- Activité 5 : Trouver la masse totale *m* 23
- Activité 6 : Trou noir ou beaucoup d'étoiles ? 23
- Activité 7 : Propriété fondamentale des trous noirs 24
- Activité 8 (facultative) : Et si vous étiez un trou noir ? 25
- Une conclusion 26

POUR ALLER PLUS LOIN 27

- Articles scientifiques 27
- Quelques liens 27
- Livres 27

Coproduit par : ESA/ESO - CEA / Direction de la Communication / Service Édition Événements

Auteurs : Gijs Verdoes Kleijn, Anne Værnholt Olesen – ESA/ESO
François Saint-Jalm, Professeur de Physique – Chimie à l'Éducation Nationale détaché au CEA
Anne Rhodes – ESA/ESO, Roland Lehoucq – Astrophysicien au CEA

Conception graphique : Lucille Colombel – CEA / Direction de la Communication
Remerciements : Un grand merci à Rainer Schroedel pour avoir fourni les données du tableau 1, et à Rosa M Ros, Richard West et Douglas Pierce-Price pour avoir fourni des données variées.
Image couverture : ESA/NASA. **Composition :** François Saint-Jalm (Éducation Nationale – CEA)

MESURE DE LA MASSE DU TROU NOIR AU CENTRE DE NOTRE GALAXIE À PARTIR D'OBSERVATIONS DU VLT DE L'ESO

INTRODUCTION

■ Les télescopes ESA/ESO/NASA

L'astronomie est une science visuelle et accessible ; cela la rend idéale pour des activités éducatives. Depuis quelques années, le Télescope Spatial Hubble de la NASA/ESA et les Télescopes de l'ESO des Observatoires de La Silla et du Mont Paranal au Chili ont obtenu des images de l'Univers de plus en plus précises et spectaculaires. Cependant le télescope Hubble et ceux de l'ESO n'ont pas seulement permis d'obtenir de nouvelles images stupéfiantes, ce sont aussi des outils irremplaçables pour les astronomes. Ces télescopes ont une excellente résolution angulaire (grande finesse d'image) et permettent aux astronomes de scruter l'Univers comme jamais et de répondre à des questions longtemps restées sans réponse.

L'analyse de telles observations, bien que très sophistiquée dans le détail, est en même temps suffisamment simple dans le principe pour donner à des lycéens la possibilité de les reproduire par eux-mêmes.

Ce TP a été produit par l'ESA (Agence Spatiale Européenne), partenaire Européen du Projet Hubble – qui peut accéder à 15 % du temps d'observation sur Hubble – en partenariat avec l'ESO (L'Observatoire Européen Austral) et le CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives).



***Figure 1** : Le Télescope spatial Hubble (NASA/ESA) depuis son orbite autour de la Terre, le télescope spatial capture des vues spectaculaires de l'Univers. Image : NASA.*

Les trous noirs : une introduction

Les trous noirs peuvent sembler mystérieux, mais ils sont faits de la même matière ordinaire que le Soleil, la Terre et tout ce qui se trouve à sa surface. La principale différence réside dans le fait que la matière d'un trou noir est confinée dans un volume incroyablement petit. Si la Terre était un trou noir, sa taille ne dépasserait pas celle d'une bille de 1 centimètre de diamètre. La loi de la gravitation de Newton,

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

nous dit que la force attractive entre deux masses m_1 et m_2 augmente à mesure que le carré de la distance entre les deux corps diminue. Vivant à la surface de la Terre, la distance nous séparant de son centre est à peu près de 6378 km. Sur une Terre de la taille d'une bille, la distance nous

séparant de son centre serait seulement de 0,5 cm. Cette diminution considérable de r augmenterait l'attraction gravitationnelle d'un facteur 10^{18} par rapport à la situation normale !

C'est cette force colossale qui rend possible de nombreux phénomènes surprenants pour tout corps qui s'approcherait trop d'un trou noir. Il existe, par exemple, un point de non-retour, appelé « horizon des événements ». Une fois franchie cette limite, rien, pas même la lumière, ne peut en sortir. Plus encore, la forte attraction gravitationnelle au voisinage du trou noir contraint tout ce qui s'y trouve à se déplacer à d'énormes vitesses pour éviter d'y faire le grand plongeon. Les collisions à grande vitesse entre les corps qui se trouvent près d'un trou noir sont cataclysmiques et produisent beaucoup de chaleur et de lumière. Nous en apprendrons plus sur les trous noirs dans cet exercice !

D'où vient le nom des trous noirs ?

C'est le physicien John Wheeler qui inventa le nom de « trou noir » en 1967. Il utilisa le terme de « trou » car tout ce qui traverse « l'horizon des événements » ne peut plus en sortir.

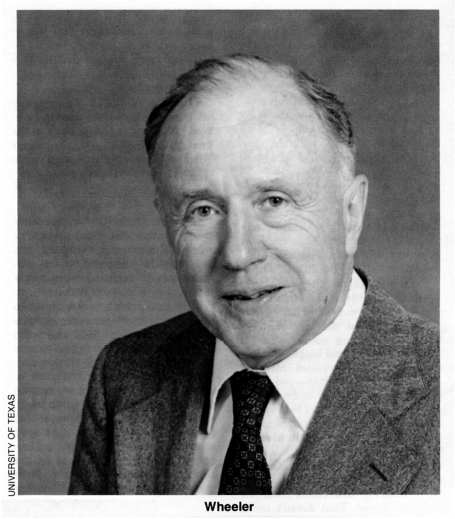


Figure 2 :
John Wheeler
Image : North American Astrophysical Observatory.

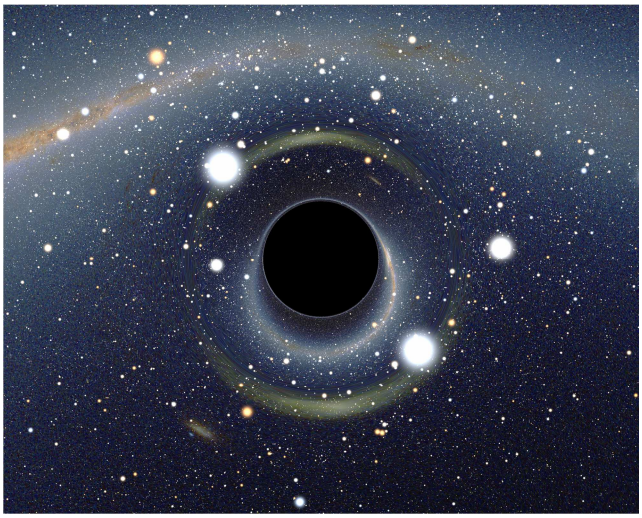


Figure 3 :
Image d'un trou noir devant la voûte céleste.
Auteur : Alain Riazuelo (IAP).

Un trou noir est ce qu'on appelle aussi un astre occlus, c'est-à-dire fermé sur lui-même. Un corps peut s'échapper de la Terre s'il est lancé à une vitesse supérieure à 11 $km \cdot s^{-1}$. C'est une vitesse vertigineuse. Mais pour s'échapper d'un trou noir, ce corps devrait avoir une vitesse supérieure à celle de la lumière – environ 300 000 $km \cdot s^{-1}$! Cependant, selon la théorie de la relativité, rien dans la nature ne peut dépasser cette vitesse limite. En d'autres termes, même la lumière ne peut s'en échapper : c'est véritablement un trou « noir ». Ainsi les choses qui disparaissent dans un trou noir ne peuvent réapparaître.

À l'origine, beaucoup de scientifiques considéraient que les trous noirs étaient une belle idée sur le papier, mais qu'ils ne correspondaient à rien de réel. Aujourd'hui, nous avons de très solides preuves qu'il y a un trou noir exactement au centre de notre propre galaxie, la Voie lactée. Nous allons redécouvrir ce trou noir dans cet exercice et déterminer sa masse.

Le trou noir au centre de notre galaxie

Le premier indice suggérant qu'il pourrait y avoir un trou noir tapi au centre de la Voie lactée s'est manifesté lorsqu'on a remarqué une source d'ondes radio très étrange dans la constellation australe du Sagittaire (voir Figure 4). Cette source a été nommée « Sagittarius A* » (SgrA*). Il était clair qu'une source inconnue d'ondes radio ne pouvait vraisemblablement pas être une étoile et il a été postulé que cette source mystérieuse pourrait bien être un trou noir au centre de la Voie lactée.

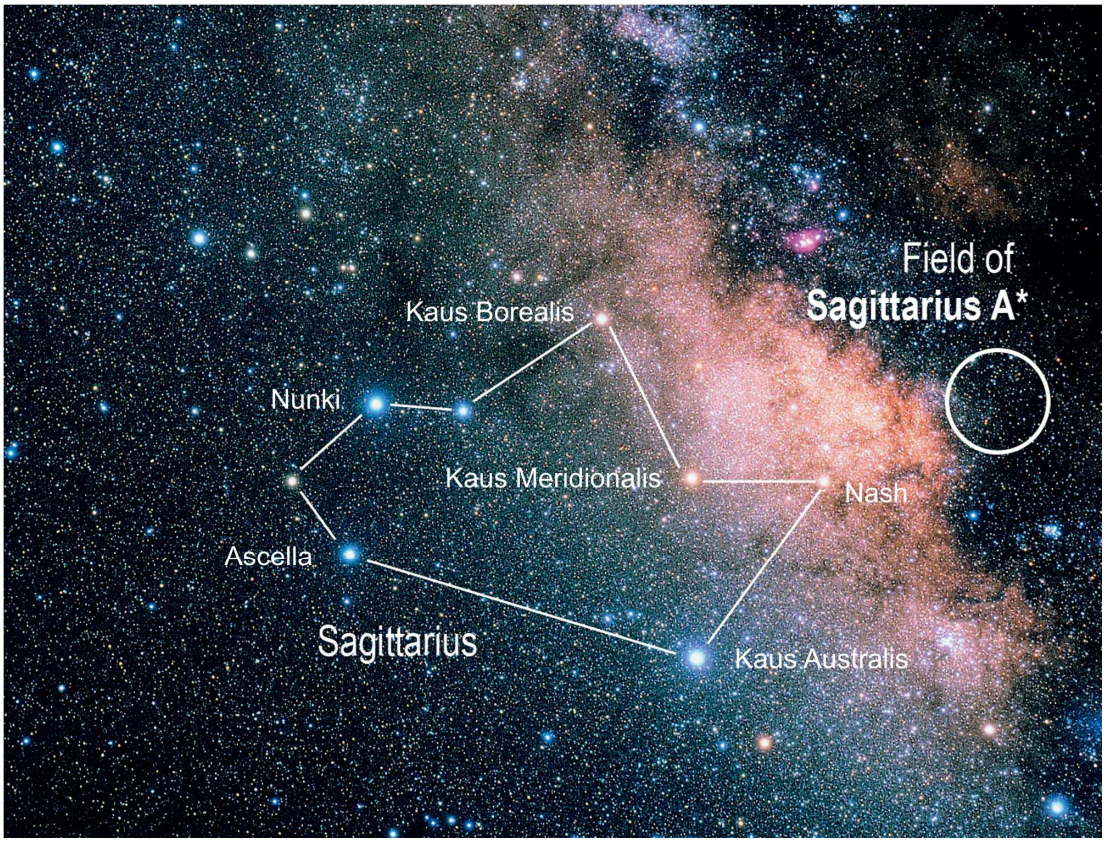


Figure 4 *: L'astérisme en forme de théière dans la constellation du Sagittaire et le champ où se trouve Sagittarius A*. Cette image montre le ciel nocturne autour de la partie « théière » de la constellation du Sagittaire. Le Sagittaire est visible au sud depuis la France en été. La source radio Sagittarius A* est localisée au centre du cercle blanc.*
Image : ESO.

Malheureusement, un trou noir est extrêmement petit et complètement noir donc nous ne pouvons pas espérer le voir directement. Mais on peut obtenir la preuve qu'il y a un trou noir en mesurant deux quantités au voisinage de l'objet suspecté :

- La vitesse des corps en orbite autour de lui
- La lumière en provenance de la région où il se trouve.

La vitesse nous donne une information sur la masse de matière concentrée dans ce volume de l'espace tandis que la lumière émise nous dit si cette masse peut être sous forme d'étoiles. Il y a beaucoup d'étoiles en mouvement autour du centre de la Voie lactée. Nous allons utiliser, dans cet exercice, des observations réelles du centre de la Voie lactée pour trouver ces étoiles et mesurer leurs vitesses.

Gravitation

C'est au début du XVII^{ème} siècle que Johannes Kepler a formulé les trois lois qui portent son nom et qui décrivent la façon dont les planètes se meuvent autour du Soleil :

1. Les planètes suivent une orbite elliptique autour du Soleil. Celui-ci occupe un des foyers de l'ellipse.

2. L'aire A balayée pendant la durée Δt par la droite joignant la planète au Soleil est une constante :

$$\frac{A}{\Delta t} = \text{constante}.$$

3. Le carré de la période P de révolution de la planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse de son orbite (c'est la moitié de son axe le plus grand). On a montré plus tard que la valeur de P peut être calculée grâce à la formule :

$$P^2 = \frac{4\,\pi^2}{G \cdot (m_1 + m_2)} \cdot a^3,$$

où G est la constante de la gravitation, m_1 la masse du Soleil et m_2 celle de la planète.

ACTIVITÉS (PREMIÈRE PARTIE)

■ Activité 1 (facultative) : Ellipses

La première loi stipule que les planètes se déplacent sur des ellipses. Décrite en mode cartésien, une ellipse de centre $O(0,0)$ est une courbe qui passe par les points $M(x,y)$ vérifiant la relation :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \qquad \textbf{(1)}$$

- En prenant $a=10$ cm et $b=5$ cm, calculer plusieurs points $M(x,y)$ en utilisant la formule **(1)**.
- Placer ces points sur un graphique de façon à obtenir une ellipse. Recommencer ce travail en prenant cette fois $a=10$ cm et $b=2$ cm.

- À quoi correspondent les valeurs a et b sur la figure obtenue ? Finalement que deviendrait l'ellipse si on prenait $a=10$ cm et $b=2$ cm ?

La Figure 5 montre une ellipse. Les segments de longueurs a et b sont nommés respectivement demi-grand axe et demi-petit axe.

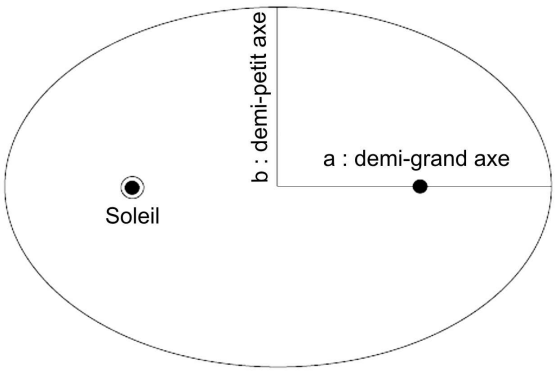


Figure 5 : *Ellipse avec ses foyers, son demi-grand axe et son demi-petit axe. Les planètes parcourent des ellipses autour du Soleil, qui occupe un des foyers comme indiqué ci-dessus. Image : ESA/ESO.*

Une ellipse possède deux foyers. La longueur d'une ligne brisée partant d'un foyer pour rejoindre l'autre en passant par un point quelconque de l'ellipse est une constante égale à « 2 a ». Cette propriété est utilisée par les jardiniers pour délimiter des parterres de fleurs de forme elliptique. Plantez deux punaises sur une feuille de papier. Reliez ces deux punaises avec un bout de fil non tendu. Maintenant placez votre crayon contre le fil et tracez une ligne en le maintenant tendu. Une ellipse dont les deux foyers sont situés là où sont plantées les punaises apparaîtra. Si on diminue la distance séparant les deux punaises, l'ellipse deviendra de plus en plus circulaire, puis formera

un cercle parfait si la distance les séparant est réduite à zéro c'est-à-dire si elles sont plantées au même endroit.

La deuxième loi de Kepler est illustrée sur la figure 6 :

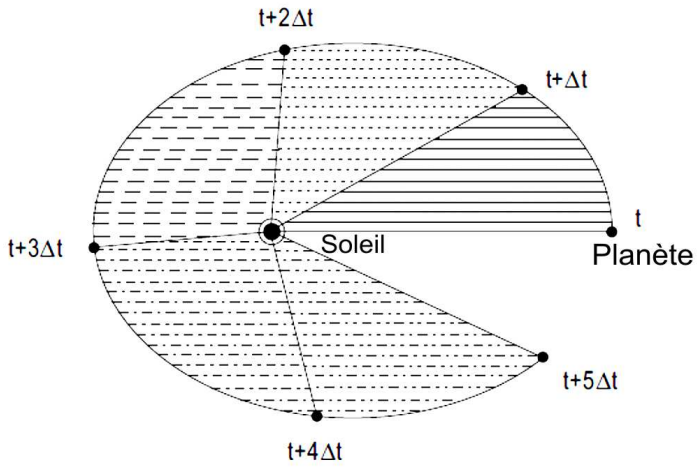


Figure 6 : *La deuxième loi de Kepler dit qu'une planète (le petit point sur l'ellipse) se déplace autour du Soleil (figuré par un point entouré d'un cercle) de telle sorte que pour des durées Δt égales le segment reliant le Soleil à la planète balaye des aires égales. Les aires égales ont été ci-dessus hachurées différemment. La vitesse orbitale de la planète est plus grande quand elle est proche du Soleil. Image ESA/ESO.*

La période orbitale d'une planète est la durée qui lui est nécessaire pour parcourir une ellipse complète autour du Soleil. La troisième loi de Kepler dit que si vous connaissez deux des trois quantités suivantes : la période (P), le demi-grand axe (a) et la masse totale $(m_1 + m_2)$ du Soleil et de la planète pris ensemble, vous pouvez calculer la troisième.

Pour cette raison, il est souvent plus intéressant en astronomie de représenter les ellipses centrées sur l'un de leurs foyers et d'adopter un système de coordonnées polaires (r,θ) :

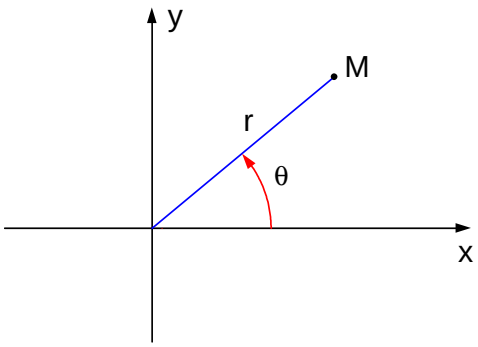


Figure 7 : *Les coordonnées polaires.*

Dans un tel système, l'équation de l'ellipse s'écrit : $r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\theta}$ ou $r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\theta}$ selon le foyer qui a été choisi comme origine.

Cela a l'air plus compliqué puisque deux nouveaux symboles apparaissent. Il y a ce qu'on appelle le paramètre « p » de l'ellipse et son excentricité « e ».

L'origine du repère est maintenant placée sur l'un des foyers (F_1) et les différentes longueurs qui interviennent sont représentées sur la Figure 8 :

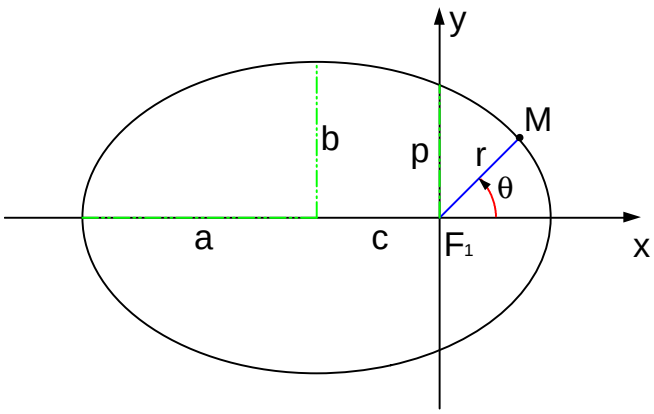


Figure 8 : *Une ellipse en coordonnées polaires avec les paramètres qui la décrivent.*

Le paramètre p est ce qu'on appelle le *demi latus rectum*. Il représente la distance séparant le foyer origine à l'ellipse perpendiculairement à l'axe joignant les deux foyers. Son expression est : $p = \frac{b^2}{a}$. Comme le demi-petit axe « b » peut varier entre 0 et la valeur de « a », la valeur de « p » peut varier entre 0 (cas d'une ellipse infiniment allongée) et « a » (cas d'un cercle).

La distance séparant chaque foyer du centre de l'ellipse est : $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

L'excentricité de l'ellipse est $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. La valeur de l'excentricité peut varier de 0 (cas d'un cercle) à 1 (cas d'une ellipse infiniment allongée). Voir l'annexe « Ellipses » pour des informations plus complètes.

- Pour les deux ellipses tracées précédemment, calculer « p » et « e », puis, se donner un certain nombre de valeurs de θ comprises entre 0 et 2π et calculer les valeurs correspondantes de r. Tracer ces ellipses en tenant compte des deux relations : $x = r \cdot \cos\theta$ et $y = r \cdot \sin\theta$.

Remarque : on peut tenter de faire ce travail à l'aide d'un tableur.

Vous pouvez également ouvrir le fichier « Ellipses 2.xls ». À l'aide des deux curseurs, on peut faire varier « a » et « b » et voir l'ellipse correspondante tracée en coordonnées cartésiennes avec origine au centre, ou en coordonnées polaires avec origine au foyer. On remarquera que « a » et « b » peuvent changer de rôle : si $a > b$, c'est « a » le demi-grand axe et si $a < b$, c'est « b » qui jouera ce rôle.

■ **Activité 2 (facultative) :** La masse du Soleil et de la Terre

▪ Calculer la somme $\left(m_{\odot} + m_{T}\right)$ de la masse du Soleil et de la Terre, en utilisant la troisième loi de Kepler et le fait que la valeur du demi-grand axe de l'orbite terrestre vaut 150 millions de kilomètres, que sa période est de 1 an et que $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}$. Attention aux unités ! Comme $\left(m_{\odot} >> m_{T}\right)$, le résultat de ce calcul donne essentiellement $m_{\odot}$.

OBSERVATIONS AVEC LE VLT

Kepler publia ses lois en 1609 et 1619. Quelques années plus tard, en 1687, Isaac Newton montra que ces lois sont la conséquence de la loi de la gravitation universelle. Cela signifie que les forces de gravitation agissent sur n'importe quel couple de corps dotés d'une masse, et pas seulement sur le Soleil et une planète. En d'autres termes, la gravitation est également responsable des trajectoires de chute des corps à la surface de la Terre, de celle de la Lune autour de la Terre, de la Terre autour du Soleil, du Soleil autour du centre de la Voie lactée ou de toute étoile en orbite autour d'un trou noir.

Depuis les années 90, les astronomes ont trouvé des étoiles se déplaçant très vite au centre de la Voie lactée. Est-il possible que ces vitesses soient dues à la présence d'un trou noir massif au centre de notre Voie lactée ?

Observer les étoiles près du centre de la galaxie est très difficile. Les nombreuses étoiles et les nuages de poussière situés entre nous et ce centre obscurcissent notre vision de ce centre. Heureusement, la lumière infrarouge a une longueur d'onde plus grande que celle de la lumière visible et est très peu absorbée par les nuages de poussière. La lumière infrarouge de ces étoiles peut ainsi nous atteindre. Une équipe d'astronomes, dirigée par l'astronome allemand Reinhard Genzel, a réalisé des images du centre de la Voie lactée en utilisant le Very Large Telescope de l'ESO situé au Chili pendant plusieurs années (voir la Figure 9).



Figure 9 : *Image des quelques années-lumière du centre de la Voie lactée prise dans le proche infrarouge avec l'instrument NACO du Very Large Telescope. Les objets compacts sont des étoiles : les étoiles bleues sont chaudes et les rouges plus froides. Les deux flèches jaunes indiquent la position du candidat trou noir « Sagittarius A* » au centre de la Voie lactée. La double flèche jaune indique la longueur séparant deux points de 1 année-lumière (distance parcourue dans le vide par la lumière en une année terrestre) et qui correspond à une distance angulaire de 8 secondes d'arc. Image : ESO.*

Les images successives, prises à différentes dates, montrent que les étoiles proches du centre de la Voie lactée bougent un peu. Une étoile en particulier, appelée S2, s'est considérablement déplacée au cours des années. Sa position lorsqu'elle était proche du centre de la Voie lactée est montrée sur l'image de la Figure 10.

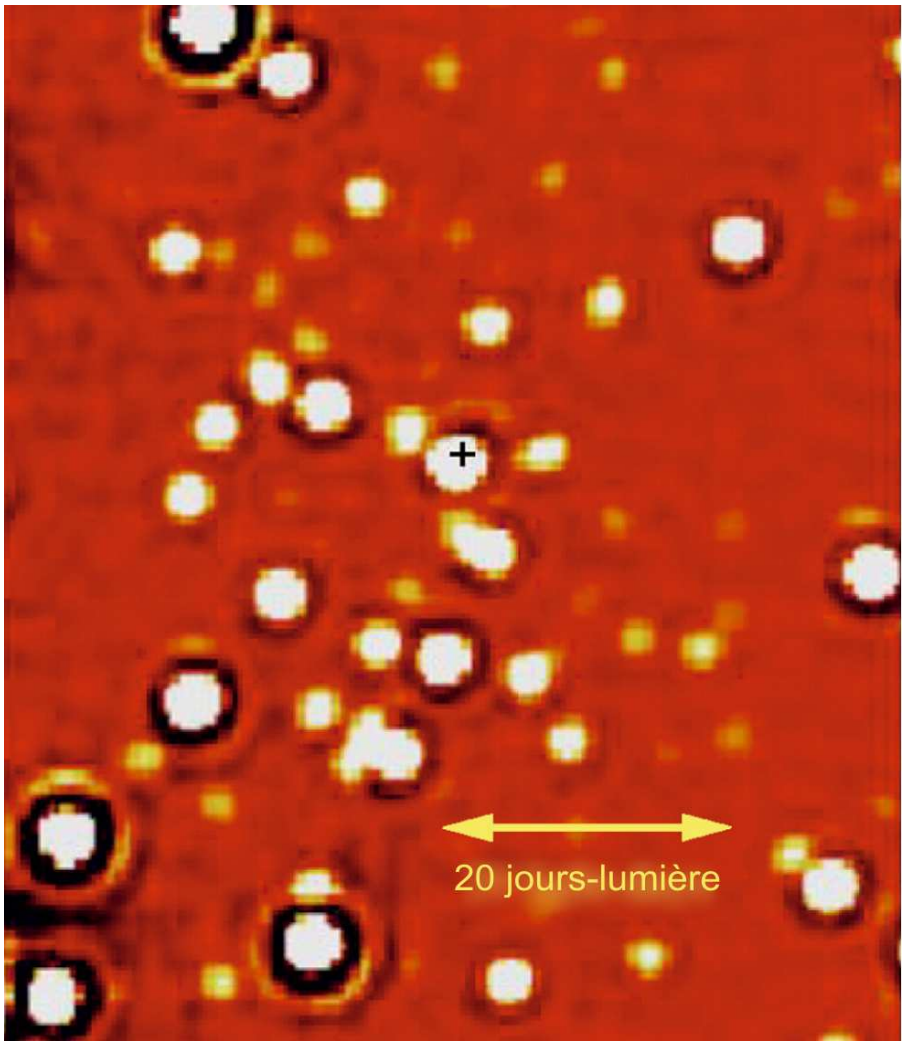


Figure 10 : *Image dans le proche infrarouge de la région centrale de la Voie lactée. La largeur angulaire est d'à peu près 2 secondes et cela correspond environ à 91,7 jours-lumière (1 jour-lumière est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant un jour terrestre). La radio-source SgrA* au centre de la Voie lactée est indiquée par la croix. Le point blanc qui est presque au même endroit est l'étoile S2. Image : ESO.*

Positions de l'étoile S2

Date (années)	X	Δx	Y	Δy
1992,226	0,104 "	0,003 "	-0,166 "	0,004 "
1994,321	0,097 "	0,003 "	-0,189 "	0,004 "
1995,531	0,087 "	0,002 "	-0,192 "	0,003 "
1996,256	0,075 "	0,007 "	-0,197 "	0,010 "
1996,428	0,077 "	0,002 "	-0,193 "	0,003 "
1997,543	0,052 "	0,004 "	-0,183 "	0,006 "
1998,365	0,036 "	0,001 "	-0,167 "	0,002 "
1999,465	0,022 "	0,004 "	-0,156 "	0,006 "
2000,474	0,000 "	0,002 "	-0,103 "	0,003 "
2000,523	-0,013 "	0,003 "	-0,113 "	0,004 "
2001,502	-0,026 "	0,002 "	-0,068 "	0,003 "
2002,252	-0,013 "	0,005 "	0,003 "	0,007 "
2002,334	-0,007 "	0,003 "	0,016 "	0,004 "
2002,408	0,009 "	0,003 "	0,023 "	0,005 "
2002,575	0,032 "	0,002 "	0,016 "	0,003 "
2002,65	0,037 "	0,002 "	0,009 "	0,003 "
2003,214	0,072 "	0,001 "	-0,024 "	0,002 "
2003,353	0,077 "	0,002 "	-0,030 "	0,002 "
2003,454	0,081 "	0,002 "	-0,036 "	0,002 "

***Tableau 1** : Coordonnées de l'étoile S2.*

Première colonne : date de la mesure de la position de S2. Par exemple 2000,500 représente exactement le milieu de l'année 2000.

Colonnes 2 à 5 : les positions x et y de S2 avec leur incertitude. L'unité est la seconde d'arc. L'origine (0,000 " , 0,000 ") est la direction du centre de la Voie lactée.

ACTIVITÉS (DEUXIEME PARTIE)

Calcul de la masse du trou noir

Avec les positions de S2 rassemblées dans le Tableau 1, nous pouvons déterminer la masse de SgrA* en utilisant les lois de Kepler. Les masses sont mentionnées dans la troisième loi. Ainsi, nous pouvons utiliser cette loi pour trouver la masse de SgrA*. Elle stipule que si vous voulez trouver la masse totale $m = m_{TN} + m_{É}$, c'est-à-dire la somme de la masse du trou noir (m_{TN}) et de celle de l'étoile $(m_{É})$, vous devez connaître la période (P) et le demi-grand axe (a) de l'orbite de l'étoile.
Vous trouverez d'abord la masse totale et alors vous arriverez à comprendre quelle est la part qui revient au trou noir et celle qui revient à l'Étoile.

■ **Activité 3 :** Trouver le demi-grand axe « a »

Vous pouvez déterminer le demi-grand axe de l'orbite en ajustant une ellipse sur les positions de S2 rassemblées dans le Tableau 1.
Cela se fera en deux temps : une première étape permettra d'obtenir une évaluation approximative des différents paramètres de l'ellipse et une seconde étape nous conduira à une détermination plus précise en utilisant le secours d'un tableur et de la méthode dite « des moindres carrés ».

Étape 1 : Détermination approximative des paramètres de l'ellipse qui passe au plus près des positions mesurées.

- Sur une feuille de papier millimétré, ou en utilisant un tableur (la feuille « Tracé de la trajectoire de S2 » du fichier Excel « Trou noir galactique » permet de faire ce travail), placer sur un graphique toutes les positions de S2 telles qu'on les trouve dans le tableau 1.

- Indiquer l'incertitude sur x et y pour chaque position. Afin d'y parvenir, dessiner des « barres d'erreur » dont la demi-longueur correspond à l'incertitude. Si vous avez utilisé un tableur, imprimez le graphique, sachant que dans ce cas l'échelle obtenue sur l'axe des « x » n'est souvent pas la même que celle de l'axe des « y ».

- Dessiner « au jugé », mais avec soin, une ellipse qui passe au plus près de ces positions. Elle ne doit pas nécessairement passer exactement sur chacun des points du fait de l'incertitude des positions mesurées. Il n'est pas recommandé d'éliminer les points qui ne semblent pas convenir.

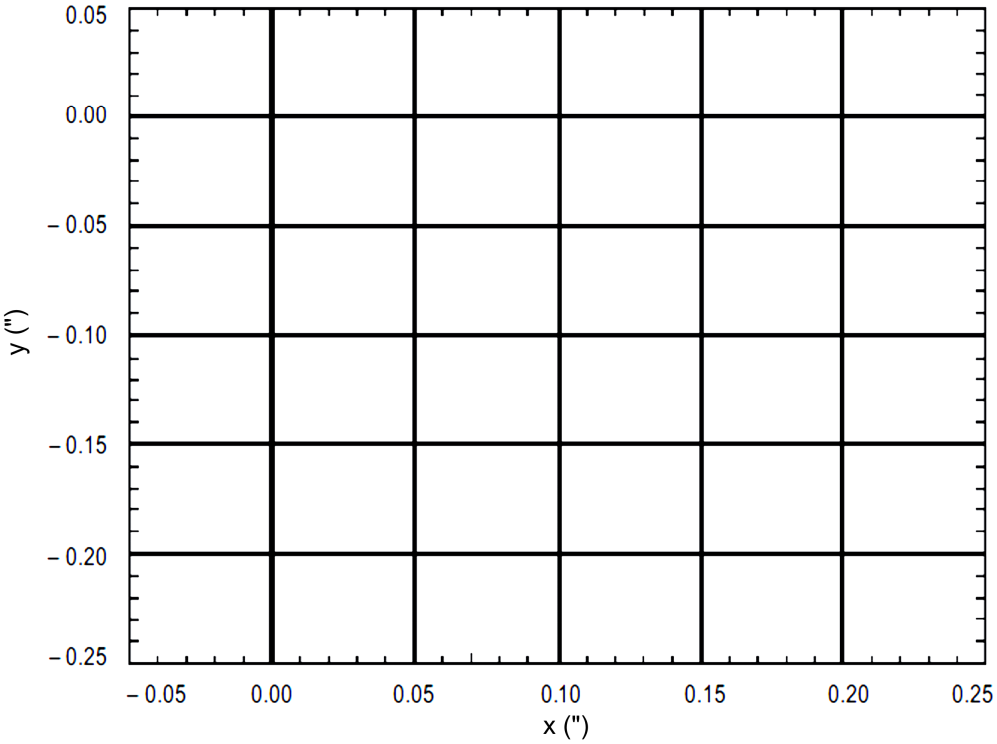


Figure 11 : *Modèle de graphique à remplir dans l'Activité 3.*

▪ Mesurer maintenant le demi-grand axe « a » et le demi-petit axe « b » de l'ellipse obtenue. À cette fin, positionner les quatre extrémités de ces deux segments et déterminer leurs coordonnées en tenant compte, le cas échéant, des échelles sur chacun des axes. Puis, calculer la longueur de ces segments, exprimée en secondes d'arc.

▪ Déterminer l'angle φ que forme le grand axe de l'ellipse avec l'axe des « x ». Il s'agit de l'angle représenté ci-dessous et exprimé en radians (pour information, sa valeur est proche de $-1\,\text{rad}$).

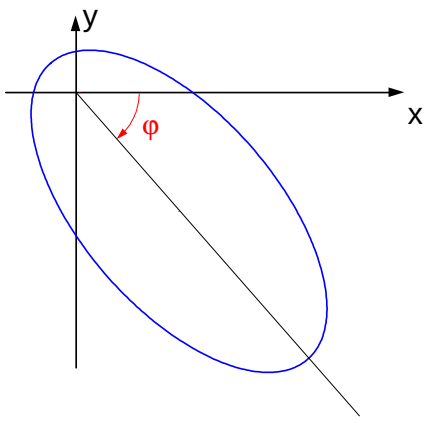


Figure 12 : *Définition de l'angle φ.*

Étape 2 : Ajustement précis de l'ellipse qui modélise le mieux l'orbite de S2.

- Ouvrir le fichier Excel « Trou noir galactique » et sélectionner la feuille « Ajustement de l'ellipse ». Introduire dans les cellules J4, J5 et J6 les valeurs approximativement calculées pour φ, a et b respectivement. Une ellipse à peu près ajustée devrait apparaître.
- À l'aide des « toupies » situées en H8, H9 et H10, modifier les valeurs prises par φ, a et b de façon à **minimiser** la valeur prise par l'indice d'ajustement situé en I10. Celui-ci calcule la somme des distances à l'ellipse de chacun des points de mesure. Lorsque sa valeur est à son minimum, l'ellipse est correctement ajustée.
- Affiner le réglage des valeurs de φ, a et b à l'aide des « toupies » de « réglage fin » situées en H13, H14 et H15.
- Une fois l'ellipse ajustée, la valeur du demi-grand axe « a », exprimée en secondes d'arc, se lit dans la cellule « J9 ».
- Calculer ce demi-grand axe en temps de lumière puis en mètres en tenant compte du fait qu'à la distance où se trouve le présumé trou noir (25 900 a.l.), 2 secondes d'arc représentent 91,7 j.l. (jours-lumière) et que la lumière se propage dans le vide à la vitesse $c = 3 \cdot 10^8$ m.s^{-1}.
- Comparer votre résultat avec celui des différents élèves de votre classe et utiliser cette information pour estimer son incertitude. La valeur de ce demi-grand axe peut également être calculée plus exactement en utilisant une formule mathématique. Votre professeur connaît le résultat de ce calcul sous la forme « $a \pm \Delta a$ ». Si votre travail a été précis, votre résultat devrait se trouver à l'intérieur de « l'intervalle de confiance » donné par votre professeur. Sinon, des causes d'imprécision à identifier sont à l'origine d'un écart trop important entre votre résultat et celui que les mesures auraient dû vous permettre de trouver. L'incertitude calculée à partir des résultats de la classe indique leur dispersion et permet d'estimer collectivement la qualité du travail de cette classe.

■ **Activité 4 :** Trouver la période P

Vous devez maintenant trouver la période (P) de l'orbite de S2. Pendant que l'étoile tourne autour du trou noir en effectuant une orbite complète, le « rayon-vecteur » – le segment qui relie l'étoile au supposé trou noir – balaye l'aire (A_{ell}) de l'ellipse.

La deuxième loi de Kepler vous dit que l'aire balayée par ce rayon-vecteur est proportionnelle à la durée de balayage. Ainsi, pendant la durée Δt que met l'étoile pour aller d'une position 1 à une position 2, le rayon-vecteur balaye une aire ΔA telle que :

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A_{ell}}{P} \qquad \textbf{(2)}$$

Pour calculer P, il faut donc mesurer Δt et $\frac{A_{ell}}{\Delta A}$.

Au moins trois méthodes sont possibles.

Méthode A : Utiliser du papier, des ciseaux et une balance de précision.

- Imprimer l'ellipse correctement ajustée sur du papier calibré de telle sorte qu'elle occupe le maximum de surface. Découper l'ellipse entière à l'aide de ciseaux. Peser cette ellipse sur une balance dont la sensibilité est au moins de 0,01 g. On a ainsi obtenu une masse m_{ell}.
- Découper maintenant le secteur qui n'a pas été balayé par le rayon-vecteur reliant l'étoile au trou noir pendant la durée Δt des observations et peser la partie la plus grande. On connaît maintenant $m_{\Delta A}$. Déterminer maintenant le rapport $\frac{A_{ell}}{\Delta A}$ en utilisant le fait que si l'épaisseur du papier est bien uniforme, on a nécessairement : $\frac{A_{ell}}{\Delta A} = \frac{m_{A_{ell}}}{m_{\Delta A}}$.

La précision de cette méthode peut être améliorée en imprimant préalablement l'ellipse à découper sur du papier un peu épais dont la densité surfacique est bien uniforme.

- Calculer maintenant P à l'aide de la formule **(2)** et des calculs précédents. La valeur de Δt peut être déterminée à partir des dates des observations données dans le tableau 1. Comparer le résultat obtenu avec celui que connaît votre professeur.

Méthode B : Utiliser du papier millimétré et compter des carrés.

- Imprimer l'ellipse sur papier millimétré en faisant en sorte qu'elle occupe le plus de place possible.
- Compter les carrés (mm^2) contenus dans l'aire balayée par le rayon vecteur pendant la durée des observations. On obtient ainsi une surface proportionnelle à l'aire ΔA : $S_{\Delta A}$. Compléter le comptage de façon à couvrir l'aire A_{ell} toute entière. On obtient alors $S_{A_{ell}}$. Calculer le rapport $\frac{A_{ell}}{\Delta A}$ en utilisant le fait que $\frac{A_{ell}}{\Delta A} = \frac{S_{ell}}{S_{\Delta A}}$. Puis calculer P en utilisant la formule **(2)**. Comparer la résultat obtenu avec celui que connaît votre professeur.

Méthode C : Utiliser la puissance de calcul d'un tableur (ici Excel).

- Reprendre le fichier « Trou noir galactique » et examiner les calculs effectués sur la feuille « Ajustement de l'ellipse ».

- Dans le tableau « Calculs ellipse », l'ellipse est générée à partir d'un paramètre « θ » qui représente l'angle que fait le rayon « r » avec l'axe des « x ». Il s'agit des coordonnées polaires.

On calcule ensuite, à partir des deux demi-grands axes « a » et « b », dont les valeurs peuvent être modifiées à l'aide des « toupies », le paramètre « p » et l'excentricité « e » par les formules $p = \frac{b^2}{a}$ et $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Puis, pour chaque valeur de « θ » comprise entre 0 et 2π (il y en a 1000), on calcule la valeur de « r » par la formule $r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \pi)}$ (l'angle π qui est retranché permet d'obtenir une ellipse dont le foyer origine se situe à gauche).

Les colonnes « x » et « y » contiennent les valeurs correspondantes calculées grâce à $x = r \cdot \cos\theta$ et à $y = r \cdot \sin\theta$.

Enfin, une matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ est appliquée aux coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour obtenir les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ de l'ellipse tournée d'un angle φ.

Puis, dans le tableau « Calcul de la distance à l'ellipse et minimisation », on calcule la distance de chaque point de mesure avec tous les points de l'ellipse. La valeur minimale est choisie (cellules AA4 à AS4) et la somme de ces valeurs minimales est calculée pour donner l'indice d'ajustement situé en I18.

Enfin le tableau « Recherche du point de l'ellipse le plus proche de chaque point de mesure » permet de trouver « l'index » « n » du point de l'ellipse qui s'approche le plus de chacun des points de mesure. Ceux-ci sont désignés par les lettres majuscules allant de « A » à « S ». Pour chaque point, dans la colonne « n » se trouve l'information « Loin » si le point de l'ellipse n'est pas le bon et la valeur de « n » si le point convient.

- Reporter, dans la colonne O de la feuille « Calcul de la période P » les lettres « A », « B », etc, « S » dans la cellule située sur la ligne qui porte l'indice « n » (colonne H) trouvé dans le tableau « Recherche du point de l'ellipse le plus proche de chaque point de mesure » de la feuille « Ajustement de l'ellipse ». Cela permet de connaître les coordonnées x' et y' du point de l'ellipse le plus proche d'un point de mesure : elles sont dans les colonnes M et N e, regard de la lettre qui est portée dans la colonne O.

On a tracé ci-dessous l'ellipse ajustée, ainsi que les droites reliant le foyer origine au point de l'ellipse le plus proche des points de mesure (sauf la droite « D » qui est trop près de la droite « E »). On peut ainsi choisir les points entre lesquels calculer l'aire ΔA. Il est préférable de choisir des points éloignés l'un de l'autre et proches de l'ellipse calculée.

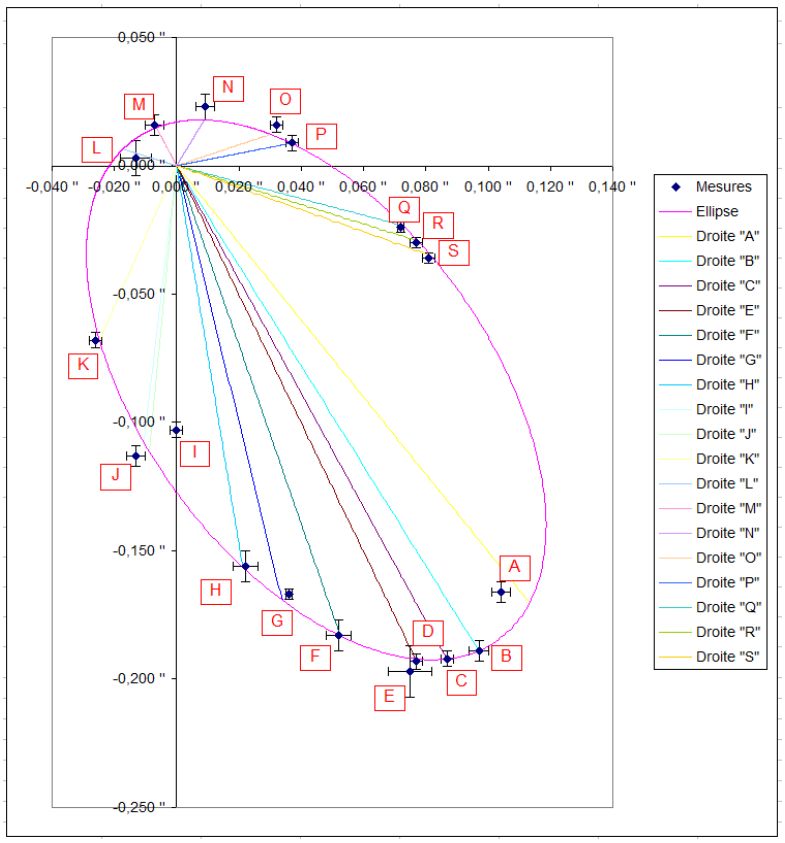


Figure 13 : *Ellipse représentant la trajectoire de S2 ajustée sur ses positions mesurées.*

Le calcul des aires s'appuie sur le principe suivant :
L'ellipse a été tracée par une succession de 1000 points qui sont ensuite reliés entre eux.

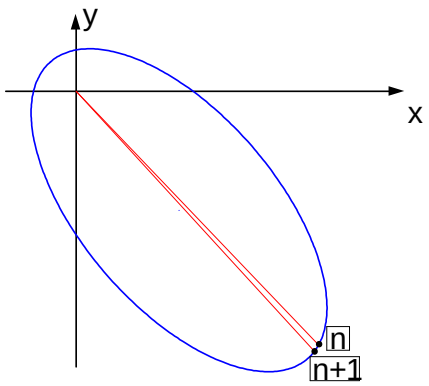


Figure 14 : *Secteur limité par deux points successifs permettant de tracer l'ellipse.*

Il suffit donc de savoir calculer l'aire d'un triangle délimité par deux segments voisins issus de l'origine du repère. Ainsi, en ajoutant les petites aires successives des secteurs délimités par ces segments, on va pouvoir calculer l'aire de n'importe quel secteur de l'ellipse.

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan (x,y). $\vec{u}$ est défini par ses coordonnées $(u_x,u_y,0)$ et $\vec{v}$ par les siennes $(v_x,v_y,0)$. Le produit vectoriel $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et

ses coordonnées sont : $\left(0,0,u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x\right)$ (**Formule 3**). La « longueur » de ce vecteur, ou plutôt sa norme, est égale à la surface du parallélogramme s'appuyant sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

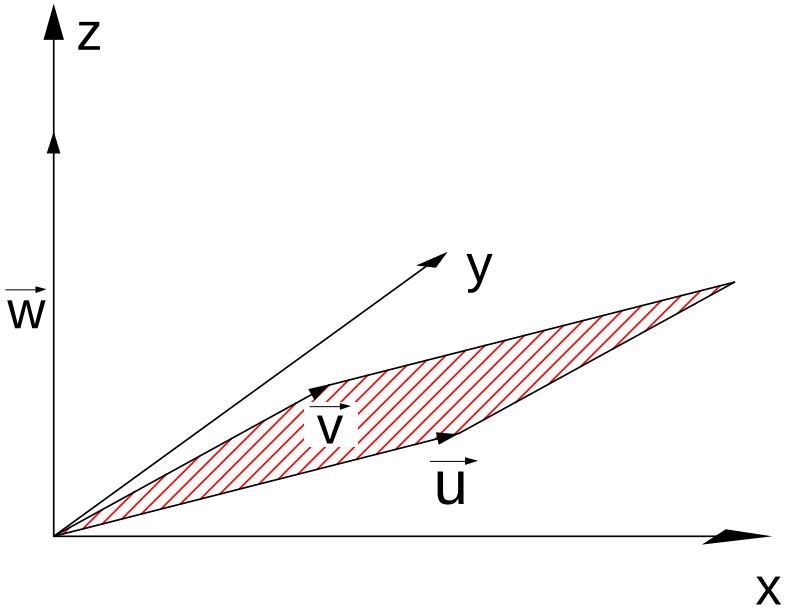


Figure 15 : *Produit vectoriel de deux vecteurs.*

L'aire cherchée est donc la moitié de la norme de $\vec{w}$.

Se placer dans la feuille « Calcul de la période P ».
Calculer, dans la cellule Q5, l'aire du petit secteur compris entre les droites d'indice « $n = 0$ » et « $n = 1$ » en utilisant la **Formule 3**. Ces aires sont exprimées en « secondes d'arc au carré ».
Puis reproduire ce calcul pour les mille secteurs suivants par incrémentation.
Calculer ensuite, dans la cellule R5, la somme de toutes les aires trouvées dans la colonne Q afin d'obtenir l'aire complète de l'ellipse.
On remarquera qu'on aurait pu utiliser la formule $A_{ell} = \pi \cdot a \cdot b$. Mais comme ΔA sera calculée en sommant des petites aires, il est vraisemblable que les erreurs faites sur chacune de ces aires en assimilant un petit secteur à un triangle vont se compenser dans le calcul du rapport $\frac{A_{ell}}{\Delta A}$.

Dans la cellule S5, calculer ΔA en sommant les petites aires correspondant au secteur choisi. (Attention, le « trou » comprise entre le point « A » et le point « S » est situé au milieu du tableau. Ainsi, l'aire ΔA est calculée sur deux plages de données).

Calculer le rapport $\frac{A_{ell}}{\Delta A}$ dans la cellule T5.

Enfin calculer la période P de l'étoile S2 à l'aide de la Formule **(2)**.
Comparer ce résultat avec celui que connaît votre professeur.

■ **Activité 5 :** Trouver la masse totale *m*

Vous pouvez maintenant calculer la somme *m* de la masse du trou noir et de l'étoile en utilisant la troisième loi de Kepler et en prenant soin d'harmoniser les unités.

■ **Activité 6 :** Un trou noir ou beaucoup d'étoiles ?

Quelle partie de cette masse appartient à l'étoile et quelle partie appartient au trou noir ?

La masse des étoiles est comprise entre 0,08 et à peu près 120 masses solaires. La masse totale *m* calculée précédemment est bien plus grande que cela. Ainsi, sans se préoccuper du type d'étoile avec lequel nous avons travaillé, il est évident que sa masse est négligeable devant celle du trou noir (en clair : $m_{TN} >> m_{É}$). L'essentiel de la masse *m* provient donc du trou noir.

Mais, « wait a minute ! » … êtes-vous certain(e) que cette masse est celle d'un trou noir ? Vous avez seulement calculé une masse. Si cela se trouve, cette masse n'est pas celle d'un trou noir, mais est celle d'un grand nombre d'étoiles. La différence entre ces deux options est que les étoiles émettent de la lumière et qu'un trou noir ne le fait pas.

Nous allons donc calculer un ordre de grandeur du nombre d'étoiles qui a la même masse que ce que nous avons trouvé et chercher quelle serait la luminosité totale de ces étoiles si elles étaient rassemblées dans un petit volume. Puis nous comparerons avec la lumière reçue de la région étudiée.

Dans une première approximation, vous pouvez faire la supposition que toute la masse appartient à des étoiles semblables au Soleil. La masse du Soleil – la « masse solaire » – vaut à peu près $m_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

- De combien de Soleils (N_{sol}) aurait-on besoin à la place de SgrA* pour reconstituer la masse *m* obtenue ci-dessus ?

La luminosité du Soleil (la puissance totale émise) vaut à peu près $L_{\odot} = 4 \cdot 10^{28}$ W.

- Quelle luminosité totale L peut-on escompter pour la masse calculée avec la supposition que la masse *m* trouvée est celle de N_{sol} « soleils » ?

Les astronomes utilisent souvent la notion de « magnitude » à la place de la luminosité. Conçue pour donner des valeurs proches de celles qu'anciennement Hipparque de Samos avait attribuées aux étoiles visibles à l'œil nu, la *magnitude apparente* des astres est une grandeur sans dimension qui se calcule maintenant à partir de mesures photométriques. Certaines étoiles très stables sont prises comme « étoiles standard ». Si le détecteur utilisé donne un signal E proportionnel à l'éclat d'une étoile donnée (dont on veut déterminer la magnitude apparente m) et si sa réponse est E_0

pour une étoile standard de magnitude apparente m_0, alors la magnitude de l'étoile étudiée est : $m = m_0 - 2{,}5 \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$.

La magnitude apparente d'une étoile est d'autant plus petite que celle-ci est brillante. Les étoiles visibles à l'œil nu ont une magnitude apparente inférieure ou égale à 6.

L'éclat apparent d'une étoile dépend de sa luminosité propre et de la distance D à laquelle elle se trouve de l'observateur. On a donc défini la *magnitude absolue* des étoiles comme étant la magnitude apparente qu'elles auraient si elles étaient toutes situées à $D_0 = 10\,\text{pc}$ de l'observateur (1 pc = 1 parsec est la distance d'où l'on peut voir un segment de longueur égal à la distance moyenne Terre-Soleil (1 Unité Astronomique) sous un angle de 1″). On la calcule à partir de l'idée de conservation du flux lumineux à travers les sphères de rayon D et D_0 en l'absence d'absorption par la formule : $M = m - 5 \log_{10}\left(\frac{D}{D_0}\right) = m - 5 \log_{10}\left(\frac{D}{10\,\text{pc}}\right)$. La différence $m - M$ est parfois appelée « module de distance » de l'étoile.

La magnitude absolue du Soleil est $M_\odot = +4{,}83$. La distance (D) nous séparant du centre de la Voie lactée est à peu près $D = 8{,}0\,\text{kpc}$.

- Calculer la magnitude apparente $m'_\odot$ du Soleil s'il était placé au centre de la Voie Lactée. Quelle serait alors la magnitude apparente m' s'il y avait N_{sol} Soleils à la place de SgrA* ?

Les astronomes ont mesuré qu'à peu près aucune lumière ne nous parvenait du centre de la Voie lactée. On peut s'en rendre compte en regardant les Figures 9 et 10. Elles montrent que la lumière provenant de SgrA* est bien plus faible que celle des étoiles environnantes.

La conclusion est que le centre de la Voie lactée est bien trop obscur pour que la masse qui s'y trouve puisse être sous forme d'étoiles. Donc cette masse ne peut être que celle d'un trou noir.

■ **Activité 7 :** Propriété fondamentale des trous noirs

Vous pourriez vous demander si les trous noirs doivent tous être aussi massifs que celui que vous venez de découvrir au centre de la Voie lactée. Dans l'introduction, un trou noir est défini comme un objet d'où la lumière ne peut s'échapper. Regardons de plus près quelle est la vitesse de libération de différents objets.

La vitesse de libération d'un corps sphérique dont la masse est (m) et le rayon (r) est donnée par la formule :

$$v = \sqrt{\frac{2\,G \cdot m}{r}} \qquad \textbf{(3)}$$

Pour un trou noir, la vitesse de libération sur l'horizon des événements est celle de la lumière (c).

Cela permet de calculer le rayon (dit « de Schwartzschild) de la sphère confondue avec cet horizon :

$$R_S = \frac{2\,G \cdot m}{c^2} \qquad \textbf{(4)}$$

- Calculer la vitesse de libération de la Terre en utilisant sa masse $m_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg et son rayon $r_T = 6378$ km (en choisissant les bonnes unités).
- Maintenant calculer la valeur que devrait avoir ce rayon pour que la vitesse de libération de la Terre soit, avec sa masse actuelle, égale à la vitesse de la lumière.
- Finalement calculer quelle serait la vitesse de libération de la Terre si elle avait son rayon actuel et si sa masse était 2200 fois celle du Soleil.

Vous voyez que la Terre est transformée en trou noir dans deux cas : si, à masse constante, vous comprimez considérablement sa matière ou si, à volume constant, vous lui ajoutez une quantité gigantesque de matière. Le Soleil a un rayon qui dépasse de peu cent fois celui de la Terre. Par conséquent le dernier calcul vous a fait envisager un objet dont la masse est 2200 fois celle du Soleil et le rayon environ cent fois plus petit. En d'autres termes, il s'agit aussi d'une énorme compression. La propriété fondamentale qui fait qu'un trou noir est un trou noir n'est donc ni la masse ni le rayon, mais la « compacité ». Cette propriété est ici représentée par le rapport entre la masse et le rayon comme l'équation **(4)** le montre de façon mathématique. On a typiquement :

$$\frac{m}{R_S} = \frac{c^2}{2\,G}$$

■ Activité 8 (facultative) : Et si vous étiez un trou noir ?

Est-ce que cette compacité signifie que la masse d'un trou noir pourrait être bien plus petite que celle du Soleil pourvu qu'il soit assez petit ?

Prendre la valeur de votre propre masse et calculer le rayon nécessaire pour obtenir une vitesse de libération égale à celle de la lumière. C'est le rayon à l'intérieur duquel vous devriez vous comprimer de façon à vous transformer en trou noir. Comparer ce rayon avec le rayon typique d'un atome : $2 \cdot 10^{-10}$ m.

■ Une conclusion

Vous voyez que tout, le Soleil, la Terre et même vous, pourrait être un trou noir si vous étiez capable de le (ou la) comprimer suffisamment. Cependant, les seuls trous noirs que nous avons trouvés dans l'Univers ont des masses bien supérieures à celle du Soleil. Parfois ces masses sont largement supérieures, comme dans le cas de SgrA* au centre de la Voie lactée. Ce n'est pas si inattendu. En revanche, vous n'implosez pas spontanément pour vous transformer en trou noir. Il faudrait pour cela avoir recours à une « machine à comprimer » qui n'existe ni dans la Nature ni dans les bureaux d'études de l'Humanité. Il en est de même pour la Terre. Elle n'implose pas d'elle-même. La matière est suffisamment robuste pour que les couches internes de la Terre puissent supporter le poids des couches externes. C'est seulement dans le cas des étoiles plus massives que le Soleil que la matière centrale risque de ne pas pouvoir supporter indéfiniment les couches qui la surmontent. Initialement, une telle étoile résiste à son effondrement sur elle-même en brûlant du carburant en son centre, exactement comme dans notre Soleil. La chaleur et la pression permettent aux couches inférieures de supporter le poids des couches externes. Cependant, l'étoile finit par arriver à court de carburant et cesse progressivement de briller. Alors, les couches centrales ne peuvent plus résister à la pression des couches externes et l'étoile s'effondre sur elle-même pour donner un trou noir – les astronomes appellent un tel événement une « supernova ».

Les lois de l'Univers nous mènent donc à la conclusion suivante : si, dans cet Univers, vous êtes trop petit, vous n'avez aucun risque de devenir un trou noir, mais … vous ne brillez pas. Si vous êtes trop gros, vous brillerez de façon éclatante dans votre vie, mais vous la terminerez sous la forme d'un cadavre obscur. Si vous vouliez trouver un compromis entre ces deux extrêmes, vous pourriez combiner une vie brillante et une fin relativement douce sous forme de naine blanche puis de naine noire en procédant à la manière de notre Soleil.

POUR ALLER PLUS LOIN : RÉFÉRENCES

Articles scientifiques

- Schrödel, R., Ott, Genzel, R., Echart, A., Mouawad, N., & Alexander, T. 2003, Astrophysical Journal, 596, 1015.
- Schrödel, R., et al. 2002, Nature, 419, 694.
- http://xxx.lanl.gov/abs/astro-ph/0306214

Quelques liens

Sur le web anglophone

- http://www.eso.org/outreach/press-rel/pr-2002/pr-17-02.html
- http://amazing-space.stsci.edu/capture/blackholes/
- http://hubblesite.org/discoveries/black_holes/
- http://www.phys.vt.edu/~jhs/faq/blackholes.html

Sur le web francophone

- http://www.youtube.com/watch?v=2pz3eHkNPQU
- http://www.eso.org/public/france/news/eso1004/
- http://www.eso.org/public/france/news/eso1028/
- http://www.eso.org/public/france/news/eso1034/
- http://www.eso.org/public/france/news/eso1124/
- http://www.eso.org/public/france/news/eso1151/
- http://www.eso.org/public/france/news/eso1247/

Livres

- Igor Novikov, « Black Holes and the Universe », Cambridge University Press, Cambridge.
- Stephen Hawkings, « Une brève Histoire du Temps », J'ai Lu.
- Mitch Begelman & Martin Rees, « Gravity's Fatal Attraction: Black Holes in the Universe », Scientific American Library Series, W. H. Freeman.
- Kip Thorne, « Trous Noirs et Distorsions du Temps », Nouvelle Bibliothèque Scientifique, Flammarion.
- Jean-Pierre Luminet, « Les Trous Noirs », Points Science, Éditions du Seuil.
- Leonard Susskind, « Trous noirs, La Guerre des Savants », Robert Lafont.

ANNEXE : LES ELLIPSES

Équation cartésienne d'un cercle

L'équation cartésienne d'un cercle est : $\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$. Elle nous indique que la distance d'un point $M(x,y)$ quelconque de ce cercle est situé à une distance constante R du centre $O(0,0)$. Cette équation peut aussi s'écrire : $\boxed{\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1}$.

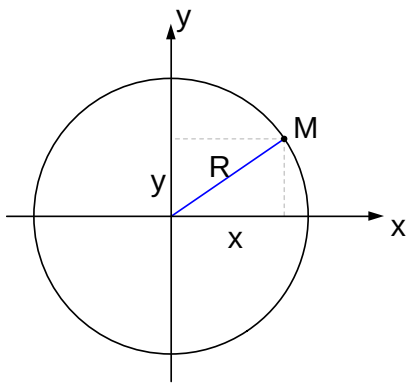


Figure A1 : *Cercle de rayon R.*

Cette équation peut se lire de la façon suivante : « Le carré du rapport de « x » à la longueur « R » ajouté au carré du rapport de « y » à la même longueur « R » est égal à 1.

Équation cartésienne d'une ellipse

La lecture précédente que l'on peut faire de l'équation cartésienne d'un cercle conduit naturellement à l'idée qu'il n'est pas obligatoire de comparer « x » et « y » à la même longueur mais à deux longueurs différentes. Si on les note « a » et « b », cela donne :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

En supposant que l'on a $a > b$, on obtient un cercle aplati selon la direction verticale : c'est une ellipse.

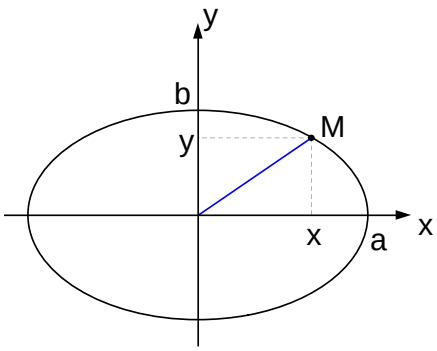


Figure A2 : *Ellipse décrite par son équation cartésienne. L'origine est au centre.*

Position des foyers de l'ellipse

Nous allons juste montrer ici qu'il existe deux points F_1 et F_2, que l'on nommera « foyers de l'ellipse », vérifiant la propriété suivante : « la somme des distances de F_1 à un point quelconque M de l'ellipse et de F_2 à ce même point M est une constante qui ne dépend pas de M ».

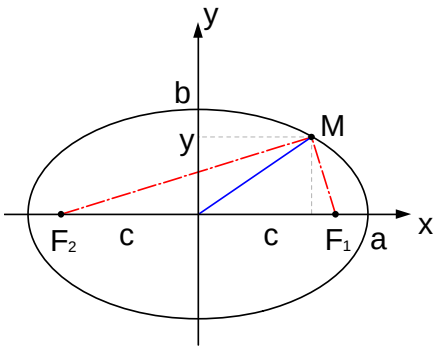


Figure A3 : *Les foyers d'une ellipse.*

Si l'on note « c » la distance de chacun des foyers au centre de l'ellipse, la longueur de la ligne brisée F_1MF_2 s'écrit :

$$F_1MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Mais si cette longueur est constante, il est possible de trouver son expression quand $x = 0$ et $y = b$, c'est-à-dire quand M se trouve sur l'axe vertical, et sa valeur quand $x = a$ et $y = 0$, c'est-à-dire quand M se trouve sur l'axe horizontal.

Dans le premier cas, on obtient : $F_1MF_2 = 2\sqrt{c^2 + b^2}$.

Dans le second, il vient : $F_1MF_2 = \sqrt{(a-c)^2} + \sqrt{(a+c)^2}$.

Mais comme on a $a > c$, on trouve : $F_1MF_2 = a - c + a + c = 2a$.

La longueur F_1MF_2 étant constante, on a nécessairement $2\sqrt{c^2 + b^2} = 2a$. Cela conduit à : $c^2 + b^2 = a^2$ et ainsi on a : $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$.

Il ne reste plus qu'à montrer qu'en adoptant cette expression pour « c », la longueur F_1MF_2 est bien constante et indépendante de la position de M sur l'ellipse.

On a : $F_1MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$.

$$\Rightarrow \quad F_1MF_2 = \sqrt{x^2 + c^2 - 2x \cdot c + y^2} + \sqrt{x^2 + c^2 + 2x \cdot c + y^2}$$

$$\Rightarrow \quad F_1MF_2 = \sqrt{x^2 + a^2 - b^2 - 2x \cdot c + y^2} + \sqrt{x^2 + a^2 - b^2 + 2x \cdot c + y^2}$$

Mais on peut écrire $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$ en utilisant l'équation cartésienne de l'ellipse. On en tire donc :

$$F_1MF_2 = \sqrt{x^2 + a^2 - b^2 - 2x \cdot c + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2} + \sqrt{x^2 + a^2 - b^2 + 2x \cdot c + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2}$$

On obtient alors, en simplifiant et en mettant un peu d'ordre :

$$F_1MF_2 = \sqrt{x^2 \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + a^2 - 2x \cdot c} + \sqrt{x^2 \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + a^2 + 2x \cdot c}$$

$$\Rightarrow \quad F_1MF_2 = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} \cdot \left(a^2 - b^2\right) + a^2 - 2x \cdot c} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} \cdot \left(a^2 - b^2\right) + a^2 + 2x \cdot c}$$

Donc en réutilisant l'expression de « c », on obtient :

$$F_1MF_2 = \sqrt{a^2 - 2x \cdot c + \frac{x^2 \cdot c^2}{a^2}} + \sqrt{a^2 + 2x \cdot c + \frac{x^2 \cdot c^2}{a^2}}$$

Cela peut s'écrire : $F_1MF_2 = \sqrt{\left(a - \frac{x \cdot c}{a}\right)^2} + \sqrt{\left(a + \frac{x \cdot c}{a}\right)^2}$

Mais comme $a > c$, on a : $a - \frac{x \cdot c}{a} > 0$.

Alors on trouve $F_1MF_2 = a - \frac{x \cdot c}{a} + a + \frac{x \cdot c}{a}$ et donc, pour tout point M de l'ellipse :

$$\boxed{F_1MF_2 = 2a}$$

Ainsi, l'une des propriétés emblématiques des ellipses se trouve démontrée.

Passage à l'équation polaire avec l'origine sur l'un des foyers

L'équation cherchée se trouve dans de nombreuses sources et s'écrit :

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\theta}}$$

« p » est le paramètre de l'ellipse et « e » son excentricité.

Les expressions de ces deux termes sont :

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{e = \frac{c}{a}} \quad \text{avec} \boxed{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Il est aisé d'accepter ces expressions, mais, comment peut-on passer de l'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ à ces expressions ?

- Il faut, tout d'abord, changer de référentiel en translatant la nouvelle origine en F_1.

Les nouvelles coordonnées seront ainsi : $x' = x - c$ et $y' = y$.

On obtient donc : $x = x' + c$ et $y = y'$.

- En reportant ces formules dans l'équation cartésienne, on obtient : $\frac{(x'+c)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$.

On en tire : $y'^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{(x'+c)^2}{a^2}\right)$.

- Si l'on ajoute x'^2 de chaque côté du signe « = », on obtient :

$$x'^2 + y'^2 = x'^2 + b^2 \cdot \left(1 - \frac{(x'+c)^2}{a^2}\right)$$

Mais on a : $x'^2 + y'^2 = r^2$. Donc on obtient : $r^2 = x'^2 + b^2 \cdot \left(1 - \frac{(x'+c)^2}{a^2}\right)$.

- En développant le membre de droite, il vient : $r^2 = x'^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(x'^2 + 2\,x' \cdot c + c^2\right)$.

- En mettant de l'ordre, on trouve : $r^2 = x'^2 \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - 2\frac{b^2}{a^2} \cdot c \cdot x' + b^2 \cdot \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)$.

- En utilisant les relations : $c^2 = a^2 - b^2$ et $a^2 - c^2 = b^2$, on obtient :

$$r^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot x'^2 - 2\frac{b^2}{a^2} \cdot c \cdot x' + \frac{b^4}{a^2}$$

Cela se transforme en : $a^2 \cdot r^2 = c^2 \cdot x'^2 - 2\,b^2 \cdot c \cdot x' + b^4$.

D'où l'on tire : $a^2 \cdot r^2 = \left(c \cdot x' - b^2\right)^2$.

- Il faut connaître le signe de « $c \cdot x' - b^2$ ».

x' peut varier entre « $-(a+c)$ » et « $a-c$ ».

Donc « $c \cdot x' - b^2$ » varie linéairement entre « $-a \cdot c - c^2 - b^2$ » qui est négatif et « $c \cdot a - c^2 - b^2$ » qui vaut « $c \cdot a - a^2 + b^2 - b^2$ » (en tenant compte de $c^2 = a^2 - b^2$), c'est-à-dire « $a \cdot (c - a)$ » qui est également négatif.

Ainsi quelle que soit la valeur de x', le terme « $c \cdot x' - b^2$ » est toujours négatif.

- On en déduit : $a \cdot r = b^2 - c \cdot x'$.
- Mais on sait que : $x' = r \cdot \cos\theta$. On en déduit : $a \cdot r + c \cdot r \cdot \cos\theta = b^2$.
- Divisant par « r », on obtient : $a \cdot \left(1 + \frac{c}{a} \cdot \cos\theta\right) = \frac{b^2}{r}$.

D'où le résultat : $r = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{c}{a} \cdot \cos\theta}$.

- Nommons « p » le paramètre de l'ellipse : $p = \frac{b^2}{a}$ et « e » son excentricité : $e = \frac{c}{a}$. On en déduit l'expression bien connue : $\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\theta}}$.

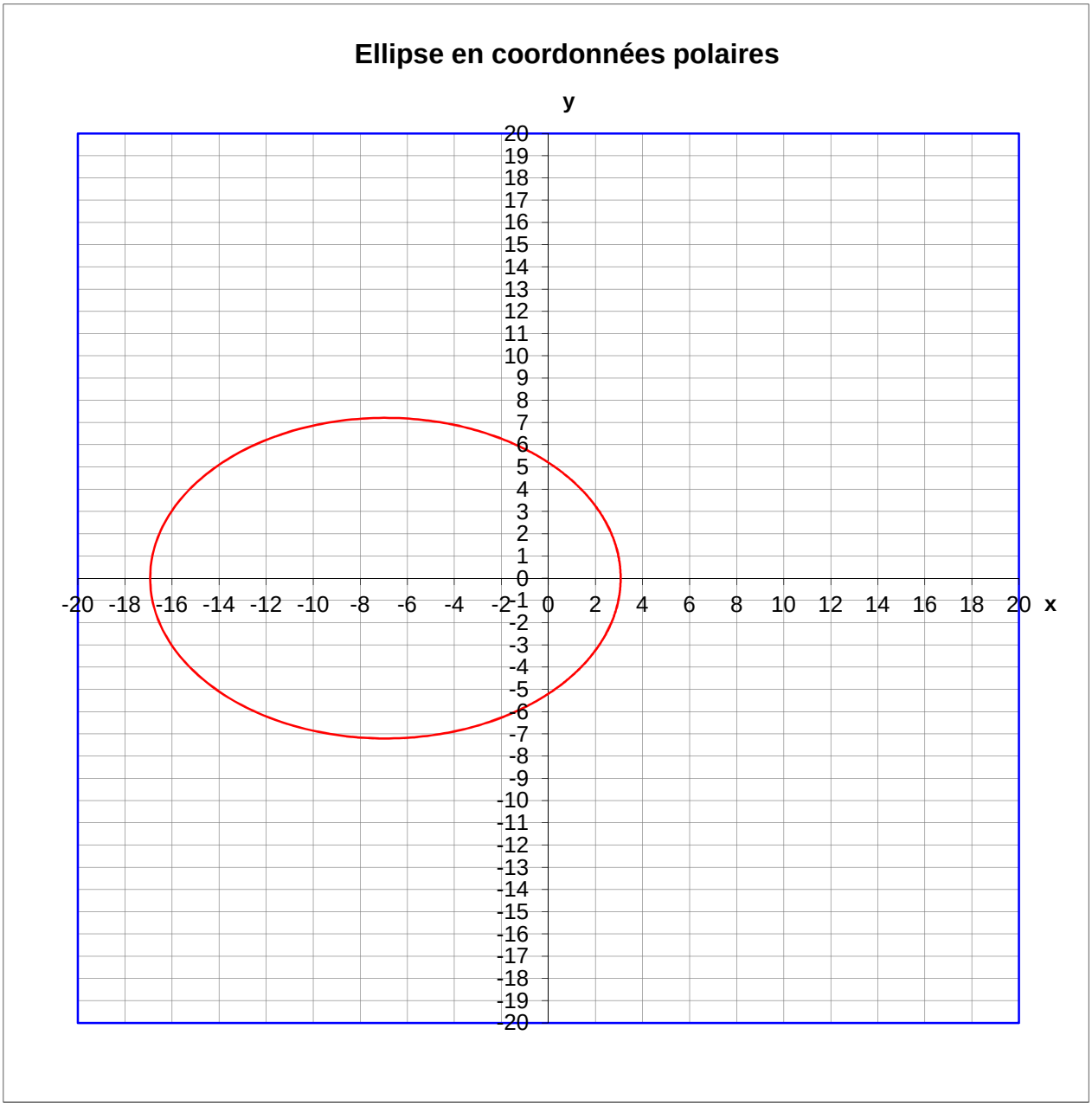


Figure A4 : *Représentation cartésienne d'une ellipse paramétrée en coordonnées polaires.*

www.cea.fr

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
Direction de la Communication | Service Editions - Evènements
91191 Gif-sur-Yvette Cedex | T. +33 (0)1 64 50 16 09

Établissement public à caractère industriel et commercial | RCS Paris B 775 685 019